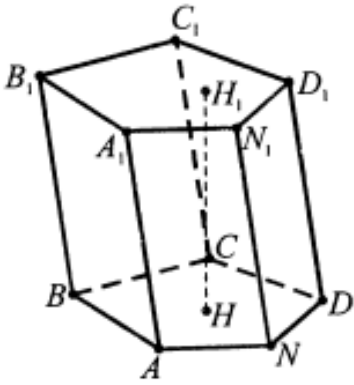


ТЕМА : МНОГОГРАННИКИ

Призма

Многогранник, який складається із двох рівних плоских багатокутників, які лежать у паралельних площинах, та бічної поверхні, утвореної паралелограмами, вершини яких є відповідними вершинами багатокутників, називають **призмою**.



$ABCDN, A_1B_1C_1D_1N_1$ – основи призми

$AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, NN_1$ – бічні ребра

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = NN_1$;

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel NN_1$

$ABB_1A_1, BCC_1B_1, DCC_1D_1, NDD_1N_1, ANN_1A_1$ – бічні грані

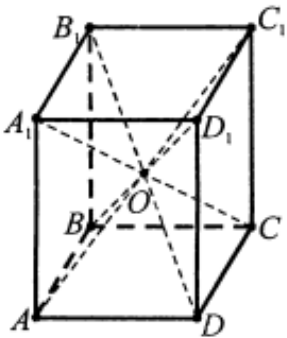
HH_1 – висота призми – відстань між площинами основ

Відрізок, який сполучає дві вершини, які не належать одній грані, називають *діагоналлю призми*.

Пряма призма – призма, бічні грані якої перпендикулярні до площин основи, *похила призма* – призма, бічні грані якої не перпендикулярні до площин основи.

Правильна призма – пряма призма, основи якої правильні багатокутники.

Паралелепіпед – призма, в основі якої паралелограм. Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.



У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагонали дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Площа поверхні та об'єм

Пряма призма:

Бічна поверхня : $S_{\text{б.п.}} = P_{\text{осн}} * H$, де H – висота призми

Повна поверхня: $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн}}$

Об'єм: $V = S_{\text{осн}} * H$.

Прямокутний паралелепіпед:

Бічна поверхня : $S_{\text{б.п.}} = P_{\text{осн}} * H = 2(a+b)c$, де H – висота призми

Повна поверхня: $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн}} = 2(ab+bc+ac)$

Об'єм: $V = S_{\text{осн}} * H = abc$

Куб:

Бічна поверхня : $S_{\text{б.п.}} = P_{\text{осн}} * H = 4a^2$, де H – висота призми

Повна поверхня: $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн}} = 6a^2$

Об'єм: $V = S_{\text{осн}} * H = a^3$

Приклад 1. Знайти площу бічної поверхні й об'єм правильної шестикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см, а висота — 9 см.

$$\blacksquare S_{\text{б.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H, P_{\text{осн.}} = 6a = 6 \cdot 8 = 48 \text{ (см)}, H = BB_1 = 9 \text{ см.}$$

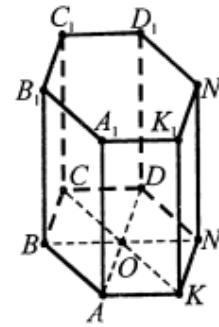
$$S_{\text{б.}} = 48 \cdot 9 = 432 \text{ (см}^2\text{)}. V = S_{\text{осн.}} \cdot H, S_{\text{осн.}} = 6 \cdot S_{\Delta AOB}$$

$$\Delta AOB \text{ — рівносторонній, } S_{\Delta AOB} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, a = 8 \text{ см.}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}. S_{\text{осн.}} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$V = 96\sqrt{3} \cdot 9 = 864\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 432 см², 864√3 см³. ■



Приклад 2. Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 9 см і 14 см і кутом між ними 30°. Висота призми — 15 см. Обчислити площу повної поверхні й об'єм призми.

$$\blacksquare S_{\text{п.}} = S_{\text{б.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

$$S_{\text{осн.}} = 9 \cdot 14 \cdot \sin 30^\circ = 9 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 63 \text{ (см}^2\text{)}.$$

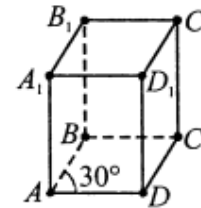
$$P_{\text{осн.}} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (9 + 14) = 46 \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{б.}} = 46 \cdot 15 = 690 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{п.}} = 2 \cdot 63 + 690 = 126 + 690 = 816 \text{ (см}^2\text{)}.$$

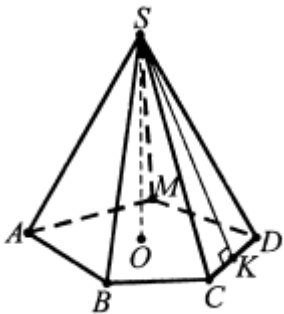
$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = 63 \cdot 15 = 945 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 816 см², 945 см³. ■



Піраміда

n-кутною пірамідою називають многогранник, одна із граней якого — довільний n-кутник, а решта граней n-кутники (бічні грані), що мають спільну вершину.



Спільну вершину бічних граней називають *вершиною* піраміди, а n-кутник — *основою* піраміди. Відрізки, які сполучають вершини піраміди з вершинами основи, називають *бічними ребрами*. ABCDM — основа піраміди, S — вершина, SA, SB, SC, SD, SM — бічні ребра, SO — висота.

Правильна піраміда — піраміда, в основі якої лежить правильний многокутник.

Апофема — висота бічної грані SK.

Властивості

1. Якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.
2. Якщо всі бічні грані нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа основи обчислюється за формулою: $S_{\text{осн.}} = S_{\text{б.п.}} \cdot \cos \alpha$

Площа поверхні та об'єм

Бічна поверхня: $S_{\text{б.п.}} = 1/2 P_{\text{осн.}} \cdot L$, де L — апофема

Повна поверхня: $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + S_{\text{осн.}}$

Об'єм: $V = 1/3 S_{\text{осн.}} \cdot H$.

Приклад 1. Обчислити об'єм піраміди, в основі якої лежить ромб з діагоналями 8 см і 6 см, якщо висота піраміди дорівнює 16 см.

А	Б	В	Г	Д
128 см ³	32 см ³	256 см ³	64 см ³	512 см ³

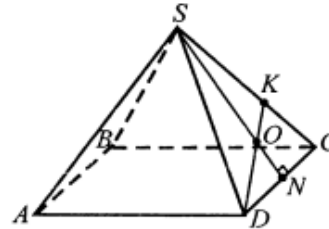
■ В основі піраміди лежить ромб з діагоналями $d_1 = 8$ см і $d_2 = 6$ см. Обчислимо його площу:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Знайдемо об'єм піраміди: } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 16 = 128 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. А. ■

Приклад 4. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут β . Відрізок, що сполучає центр вписаного в бічну грань кола з вершиною основи цієї грані, дорівнює l . Визначити бічну поверхню піраміди.

■ Нехай $SABCD$ — задана правильна піраміда. Проведемо бісектриси SN і DK трикутника SCD . Точка O перетину цих бісектрис є центром кола, вписаного в даний трикутник. За умовою задачі, $OD = l$, $\angle SDC = \beta$.



Бісектриса SN є одночасно висотою та медіаною трикутника SCD .

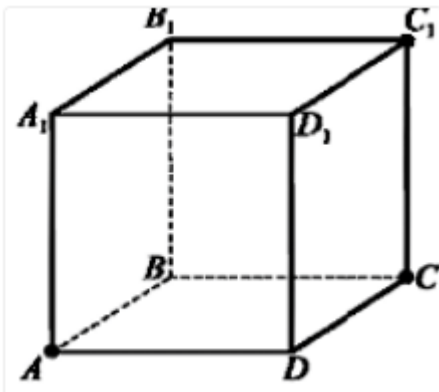
Тому $\angle SND = 90^\circ$ і $DN = NC$. З $\triangle OND$ ($\angle N = 90^\circ$, $\angle D = \frac{\beta}{2}$): $DN = OD \cdot \cos \angle D = l \cdot \cos \frac{\beta}{2}$. З $\triangle SND$ ($\angle N = 90^\circ$): $SN = DN \cdot \operatorname{tg} \angle SDN = l \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Враховуючи, що $DN = NC$, знаходимо: $S_b = 4S_{\triangle DSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} DC \cdot SN = 4 \cdot DN \cdot SN = 4l \cos \frac{\beta}{2} \cdot l \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta = 4l^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta$. Відповідь. $4l^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta$. ■

Призма Підготовка до ЗНО

- Скільки граней має п'ятикутна призма?
 - 5
 - 10
 - 7
 - 6
- Бічною гранню прямої призми є
 - трикутник
 - паралелограм
 - трапеція
 - прямокутник
- У призмі, що має 6 вершин в основі лежить:
 - трикутник
 - п'ятикутник
 - чотирикутник
 - шестикутник
- Яка фігура лежить в основі призми, що має 8 вершин?
 - Чотирикутник
 - Шестикутник
 - Трикутник
 - П'ятикутник
 - Восьмикутник
- Скільки граней має 10 - кутна призма?
 - 8
 - 10
 - 9
 - 11
 - 12
- Знайдіть довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см, 4 см.
 - $\sqrt{29}$ см
 - $\sqrt{13}$ см
 - 9 см
 - $2\sqrt{5}$ см

11.



На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перерізом куба площиною, що проходить через точки A, B, C_1 , є

- а) прямокутний трикутник
 б) рівносторонній трикутник
 в) прямокутник
 г) трапеція
12. Чому дорівнює площа бічної поверхні куба з ребром 10 см?
 а) 40 см^2
 б) 400 см^2
 в) 100 см^2
 г) 400 см^2
13. Обчисли площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 5 см, 2 см і 7 см
 а) 70 см^2
 б) 118 см^2
 в) 56 см^2
 г) 59 см^2
14. Сума всіх ребер куба дорівнює 72 см. Яка довжина ребра куба?
 а) 6 см
 б) 8 см
 в) 12 см
 г) 24 см
15. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 4 см. Діагональ більшої грані нахилена до площини основи під кутом 45° . Обчисліть площу повної поверхні паралелепіпеда.
 а) 80 см^2
 б) 56 см^2
 в) 48 см^2
 г) 46 см^2
16. Діагональ грані куба дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть діагональ куба.
 а) $2\sqrt{3}$ см
 б) $3\sqrt{3}$ см
 в) $4\sqrt{3}$ см
 г) 6 см
17. У чотирикутній призмі всі бічні грані рівні; площа основи 5 см^2 ; площа бічної грані 10 см^2 . Площа повної поверхні дорівнює ...
 а) 15 см^2
 б) 50 см^2
 в) 45 см^2
 г) 30 см^2
18. Обчисліть об'єм правильної трикутної призми, периметр основи якої 18 см, а бічна грань квадрат.
 а) $54\sqrt{3} \text{ см}^3$
 б) $72\sqrt{3} \text{ см}^3$
 в) $48\sqrt{3} \text{ см}^2$
 г) 216 см^3
19. В прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 3 см і 4 см. Його діагональ - 13 см. Обчислити площу повної поверхні.
 а) 192 см^2
 б) 168 см^2
 в) 144 см^2
 г) 232 см^2
20. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори із розрахунку: три одиниці на 50 м^3 . Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда розміру $15 \text{ м} \times 18 \text{ м} \times 25 \text{ м}$?
 а) 33
 б) 135
 в) 45
 г) 12

21. У прямому паралелепіпеді сторони основи 2 і 8 см, а кут між ними 30° . Площа бічної поверхні 20 см^2 . Знайдіть об'єм призми.

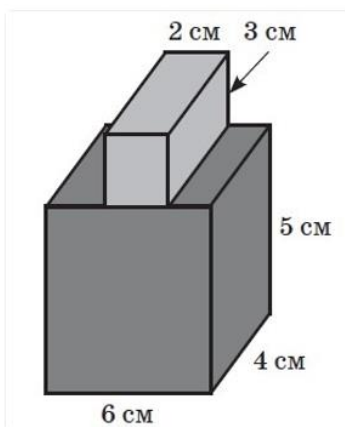
а) 5 см^3

б) 8 см^3

в) 16 см^3

г) 40 см^3

22.



Деталь складається із прямокутних паралелепіпедів. Знайдіть площу повної поверхні деталі.

а) 136

б) 180

в) 200

г) 240

23. Основа прямої призми трикутник із сторонами 5, 5 і 6 см. Діагональ меншої бічної грані утворює з бічним ребром кут 45° . Знайдіть об'єм призми.

а) $220\sqrt{6} \text{ см}^3$

б) 80 см^3

в) 72 см^3

г) 60 см^3

24. Чому дорівнює висота правильної чотирикутної призми, якщо площа бічної поверхні 200 см^2 , а сторона основи 5 см.

а) 4 см

б) 5 см

в) 10 см

г) 20 см

25. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а бічне ребро - 5 см. Знайдіть площу діагонального перерізу.

а) 30 см^2

б) $30\sqrt{2} \text{ см}^2$

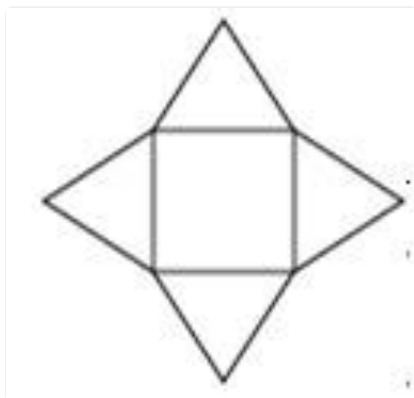
в) $15\sqrt{2} \text{ см}^2$

г) 15 см^2

Піраміда. Підготовка до ЗНО

1. Сторона основи правильної трикутної піраміди - 6 см, а бічне ребро дорівнює 5 см. Знайти бічну поверхню піраміди
а) 36 см^2 б) 90 см^2
в) 72 см^2 г) 45 см^2
2. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і меншою основою 8 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45° .
а) 72 см^3 б) 144 см^3
в) 312 см^3 г) 624 см^3 д) 936 см^3
3. Скільки всього граней у піраміди, яка має 12 ребер?
а) 4 б) 6
в) 7 г) 12
4. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а об'єм - 64 см^3 . Знайдіть висоту піраміди.
а) 4 см б) 8 см
в) 12 см г) 16 см
5. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, її висота - 8 см. Знайдіть довжину сторони основи піраміди.
а) 4 см б) 6 см
в) 10 см г) 12 см
6. Визначте площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, довжина сторони основи якої дорівнює 10 см, а довжина бічного ребра - 13 см.
а) 180 см^2 б) $30\sqrt{69} \text{ см}^2$
в) 360 см^2 г) 390 см^2

7.



- На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди ($y \text{ см}^2$)
- а) 100
 - б) $100\sqrt{3}$
 - в) $400\sqrt{3}$
 - г) 200

КОРИСНІ ПОСИЛАННЯ:

1. [Бевз "Математика 11 клас " 2019](#)
2. [Капіносов А. та ін. Математика. Комплексне видання для підготовки до ЗНО і ДПА](#)
3. [11 клас. Геометрія. Задачі на площу поверхонь піраміди та призми](#)