

ТЕМА: РІВНЯННЯ

1. **Лінійні рівняння** з однією змінною – це рівняння виду: $ax = b$, де x – змінна, a, b – деякі числа.

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ – єдиний корінь рівняння.

Якщо $a = 0$, то коренів немає

Якщо $a = 0$, $b = 0$, то x – будь-яке число.

2. **Квадратні рівняння** – це рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b, c – відомі числа.

Якщо $b \neq 0, c = 0$, то $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$

Якщо $b = 0, c \neq 0$, то $x_{1,2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ причому $-\frac{c}{a} \geq 0$

Якщо $b \neq 0, c \neq 0$, то

Умова	Корені
$D = b^2 - 4ac > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = b^2 - 4ac = 0$	$x = \frac{-b}{2a}$
$D = b^2 - 4ac < 0$	коренів немає

де D – дискримінант.

Якщо $a = 1$, то отримуємо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$, яке

розв'язують за теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 * x_2 = q \end{cases}$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x(x - 4) = x^2 + 8$.

А	Б	В	Г	Д
-2	2	-2; 2	∅	$x \in R$

■ $x(x - 4) = x^2 + 8; x^2 - 4x = x^2 + 8; -4x = 8; x = -2$.

Відповідь. Б. ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4x + 3x^2 = 7$.

■ $4x + 3x^2 = 7; 3x^2 + 4x - 7 = 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100$.

$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 + 10}{6} = \frac{6}{6} = 1; x_2 = \frac{-4 - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 - 10}{6} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$.

Відповідь. $-2\frac{1}{3}; 1$. ■

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ НА ЗНО

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Обчисліть суму коренів рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$.

№ 4, 2021д

А	Б	В	Г
-4	-3	3	4

Розв'яжіть рівняння $x^2 = 25x$.

№ 7, 2020д

А	Б	В	Г	Д
-5;5	0;25	25	-5;0;5	-25;0

Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$

№ 7, 2020

А	Б	В	Г	Д
-4;3	1;3	-3;-1	-2;3	-1;4

Розв'яжіть рівняння $x^2 - 10 = 5x + 14$

№ 2, 2017д

А	Б	В	Г	Д
-8; 3	-4; -1	-3; 8	1; 4	0; 5

Розв'яжіть рівняння $4x^2 = 1$.

№ 3, 2016д

А	Б	В	Г	Д
-2; 2	2	0,25	0,5	-0,5; 0,5

Розв'яжіть рівняння $2x(x + 2) = 5(x + 2)$

№ 7, 2013_II

А	Б	В	Г	Д
-2,5; 2	-2	2,5	-2; 0,4	-2; 2,5

Завдання відкритої форми з короткою відповіддю

Розв'яжіть рівняння $x^4 - x^2 - 20 = 0$. У відповідь запишіть *добуток* усіх його дійсних коренів. № 28, 2021

3. **Раціональні рівняння** – це рівняння виду $F(x) = G(x)$, де $F(x)$, $G(x)$ – деякі функції. Якщо хоча б один з цих виразів дробовий, то рівняння називають дробове раціональне. Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння треба:
- 1) звести його до виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
 - 2) розв'язати рівняння $P(x) = 0$
 - 3) перевірити корені на виконання умови $Q(x) \neq 0$.
4. **Ірраціональні рівняння**, рівняння, які містять змінну під знаком кореня, або в основі степеня з раціональним показником. Основні методи: а) метод піднесення обох частин до кореня; б) метод уведення нових змінних; в) штучні прийоми.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+7} = x-7$.

А	Б	В	Г	Д
3	14	3,14	-7	6

■ $\sqrt{3x+7} = x-7$. Якщо $x-7 < 0$, то рівняння коренів не має. Якщо $x-7 \geq 0$, $x \geq 7$, то:
 $(\sqrt{3x+7})^2 = (x-7)^2$; $3x+7 = x^2 - 14x + 49$; $x^2 - 17x + 42 = 0$; $x_1 = 3$ — не задовольняє умову $x \geq 7$,
 $x_2 = 14$.

Відповідь. 14. ■

ІРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА ЗНО

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{x+12} = 3$ № 10, 2021

А	Б	В	Г	Д
$[-12; -6)$	$[-6; 0)$	$[0; 6)$	$[6; 12)$	$[12; +\infty)$

Розв'яжіть рівняння $4\sqrt{x} = 1$.

№ 7, 2018

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	16	$-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{6-4x} = 4$ № 9, 2017

А	Б	В	Г	Д
$[-3; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 3)$	$[3; 6)$

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\sqrt[3]{2x} = -3$? № 11, 2014

А	Б	В	Г	Д
$(-30; -20)$	$(-20; -10)$	$(-10; 0)$	$(0; 10)$	$(10; 20)$

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{1-x} = 4$ № 12, 2013_I

А	Б	В	Г	Д
$(-20; -10)$	$(-10; -5)$	$(-5; 5)$	$(5; 10)$	$(10; 20)$

Завдання відкритої форми з короткою відповіддю

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2 + 7x - 9} + |\sin(\pi x) + 1| = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше, ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму всіх коренів. № 36, 2010_II

Розв'яжіть рівняння $x - 5 + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 0$. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх добуток. № 28, 2008

Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 9)\sqrt{-15 + 8x - x^2} = 0$. У відповідь запишіть суму коренів. № 26, 2007

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$. Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповідь їх добуток. № 26, 2006

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x - 1} = 8$ № 18, 2005

5. Показникові рівняння – це рівняння, яке містить змінну в показнику степеня.

$a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ – найпростіше показникове рівняння, $x = \log_a b$

Основні методи:

- 1) Зведення до однієї основи;
- 2) Винесення спільного множника за дужки;
- 3) Уведення нової змінної;
- 4) Графічний метод.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $0,2^{3x-1} = \sqrt{125}$.

А	Б	В	Г	Д
5	3	1	$-\frac{1}{6}$	0,4

■ $0,2^{3x-1} = \sqrt{125}$; $(5^{-1})^{3x-1} = (5^3)^{\frac{1}{2}}$; $5^{-3x+1} = 5^{\frac{3}{2}}$; $-3x+1 = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{1}{6}$.

Відповідь. Г. ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4^{x-1} - 1,5 \cdot 2^{x+2} + 20 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 20$	2	$2; \log_2 20$	10	4

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ НА ЗНО

Завдання з вибором однієї правильної відповіді _

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $2^{x+3} - 3 \cdot 2^x = 10\sqrt{2}$? № 20, 2019

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1)$	$[1; 2)$	$[2; +\infty)$

Розв'яжіть рівняння $2^{2x} = 2_{-1}_3$ № 3, 2017

А	Б	В	Г	Д
-3	-2	-1,5	1,5	2

Розв'яжіть рівняння $4^x = 8$ № 7, 2015_I

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	32

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $3^x = \frac{1}{27}$ № 14, 2014д

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]$	$(-5; -2]$	$(-2; 0]$	$(0; 2]$	$(2; +\infty)$

Якому з наведених нижче проміжків належить корінь рівняння $5^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$ №16, 2011

А	Б	В	Г	Д
$(-3; -2]$	$(-2; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 3]$

Якому з наведених нижче проміжків належить корінь рівняння $2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ №7, 2010

А	Б	В	Г	Д
$(-6; -4]$	$(-4; -2]$	$(-2; 0]$	$(0; 2]$	$(2; 4]$

Розв'яжіть рівняння $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$ №16, 2008

А	Б	В	Г	Д
рівняння не має коренів	-1	-0,5	0,5	1

Завдання відкритої форми з короткою відповіддю

Розв'яжіть рівняння $3^x \cdot 4^x = (12^{x+1})^5$ № 26, 2013_II

6. Логарифмічні рівняння.

Рівняння виду $\log_a x = b$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ називається найпростішим логарифмічним рівнянням.

Основні методи:

- 1) Зведення до однієї основи;
- 2) За допомогою властивостей логарифма;
- 3) Уведення нової змінної;
- 4) Графічний метод.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\lg(5x - 3) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	1,2	2,6	1	0

■ $\lg(5x - 3) = 1$; $\lg(5x - 3) = \lg 10$; $5x - 3 = 10$; $x = 2,6$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_2(2x + 1) = \log_2(9x + 17) - \log_2(x + 5)$.

А	Б	В	Г	Д
-3	2	2; -3	$-1\frac{5}{6}$	-2

■ $\log_2(2x + 1) = \log_2(9x + 17) - \log_2(x + 5)$; $\log_2(2x + 1) + \log_2(x + 5) = \log_2(9x + 17)$.

ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ НА ЗНО

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\log_{1/3}(x + 1) = -2$.

№ 17, 2020д

А	Б	В	Г	Д
$(-11; -2]$	$(-2; 1]$	$(1; 4]$	$(4; 7]$	$(7; 9]$

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\log_{64} x = 1/2$. № 16, 2020

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 6]$	$(6; 32)$	$[32; +\infty)$

Укажіть число, що є коренем рівняння $-\log_2 x = 3$.

№ 7, 2018д

А	Б	В	Г	Д
-9	-8	-6	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$

Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\log_4(x - 1) = 3$.

№ 5, 2018

А	Б	В	Г	Д
4	13	63	65	82

Якому проміжку належить корінь рівняння $\log_2 x = 2 \log_2 3$? № 20, 2017д

А	Б	В	Г	Д
(0; 2]	(2; 4]	(4; 6]	(6; 8]	(8; 10]

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\log_3 x = 2$?

№ 16, 2010 II

А	Б	В	Г	Д
(-4; -1]	(-1; 2]	(2; 5]	(5; 8]	(8; 11]

Завдання відкритої форми з короткою відповіддю

Розв'яжіть рівняння $\log^2_5 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню суму. Якщо рівняння не має коренів, запишіть в відповіді число 100.

№ 30, 2015 I

Розв'яжіть рівняння $\log_4 x \cdot \left(\log_4 x + \log_4 \frac{1}{16}\right) = 3$. Якщо рівняння має єдиний корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповіді їхню суму. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число 100.

№ 30, 2015 II

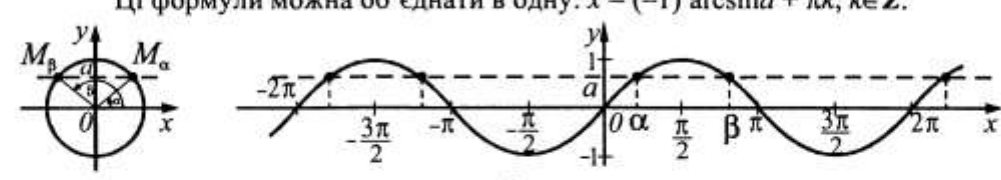
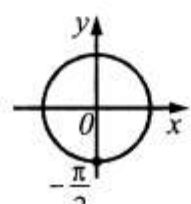
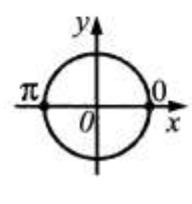
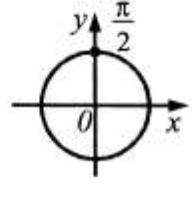
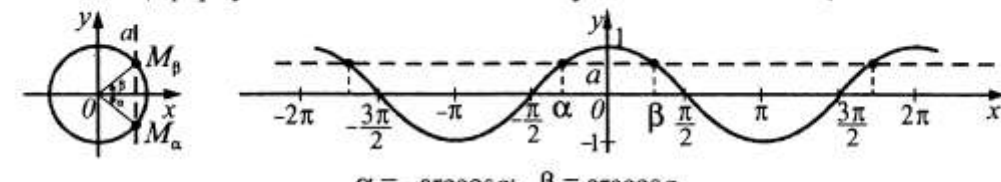
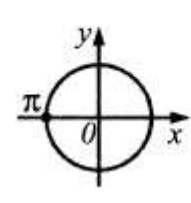
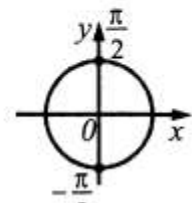
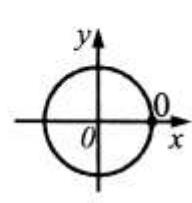
Розв'яжіть рівняння $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$. Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму.

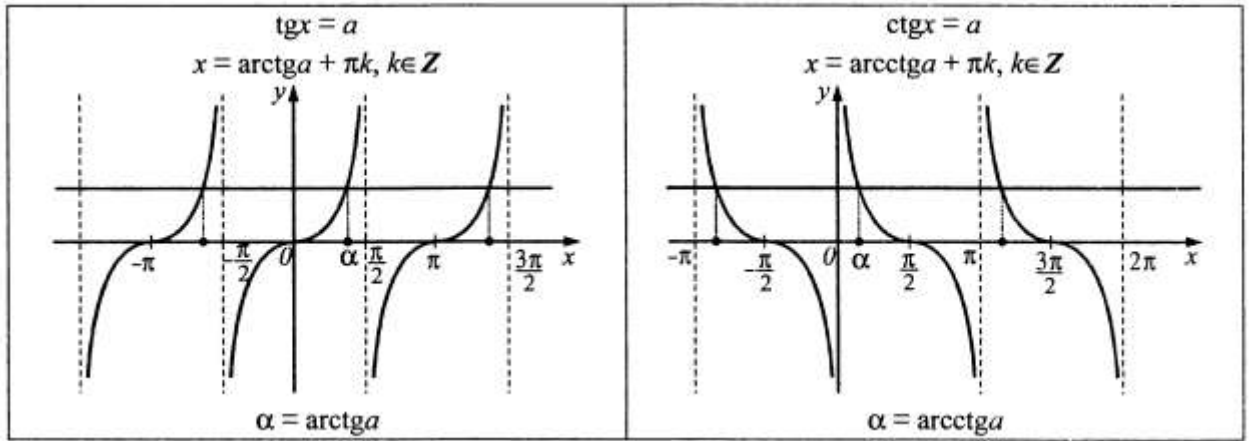
№ 29, 2014

Розв'яжіть рівняння $\log_6(x - 3) + \log_6(x - 8) = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.

№ 25, 2009

7. Тригонометричні рівняння, рівняння, які містять змінну під знаком тригонометричних функцій.

$\sin x = a$ $ a \leq 1$ $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ Ці формули можна об'єднати в одну: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.		
 $\alpha = \arcsin a; \quad \beta = \pi - \arcsin a$		
<i>Окремі випадки</i>		
$a = -1$ $\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$	$a = 0$ $\sin x = 0$ $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$a = 1$ $\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$
		
$\cos x = a$ $ a \leq 1$ $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ Ці формули можна об'єднати в одну: $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.		
 $\alpha = -\arccos a; \quad \beta = \arccos a$		
<i>Окремі випадки</i>		
$a = -1$ $\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$	$a = 0$ $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$	$a = 1$ $\cos x = 1$ $x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$
		



Приклад 1. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5},$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{60} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{12} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + 3\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$

■ $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}; 5x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 5x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. Б. ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

■ $\cos 2x = -\frac{1}{2}; 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь. Г. ■

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ НА ЗНО

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Розв'яжіть рівняння $3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$

№ 20, 2016

А $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Б $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

В $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Г $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

Д $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}(3x) = \sqrt{3}$

№ 12, 2014

А $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Б $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

В $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

Г $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$

Д $\frac{\pi}{9} + \pi n, n \in Z$

Розв'яжіть рівняння $2 \sin x = 1$

№ 17, 2009

А $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Б $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

В $(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Г $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Д $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Розв'яжіть рівняння $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

№ 11, 2008

А $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Б $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

В $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Г $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

Д $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Розв'яжіть рівняння $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

№ 8, 2006

А $(-1)^k \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

Б $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$

В $(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

$$\Gamma \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$$

$$\Delta (-1)^k \frac{\pi}{18} + \pi k, k \in Z$$

Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg}(3x) = 6$

№ 6, 2005

А $\operatorname{arccctg} 2 + \pi k, k \in Z$

Б $\frac{1}{3} \operatorname{arccctg} 6 + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

В $\frac{1}{3} \operatorname{arccctg} 6 + \pi k, k \in Z$

Г $2 + \pi k, k \in Z$

Д $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

КОРИСНІ ПОСИЛАННЯ:

1. [ЗНО-2022. Вебінар 8. Ірраціональні та тригонометричні рівняння](#)
2. [Вебінар 9. Показникові та логарифмічні рівняння. ЗНО 2021 з математики](#)
3. [Вебінар 7. Цілі, дробові раціональні рівняння. ЗНО 2021 з математики](#)
4. [Вебінар 8. Тригонометричні та ірраціональні рівняння. ЗНО 2021 з математики](#)