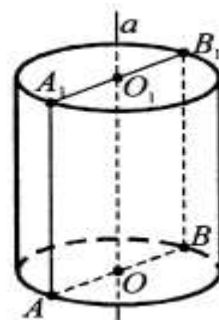


ТЕМА: ТІЛА ОБЕРТАННЯ

ЦИЛІНДР

Циліндром називають тіло, утворене в наслідок обертання прямокутника навколо осі, що містить його сторону. На рисунку зображено циліндр, який отримали в наслідок обертання прямокутника AA_1OO_1 навколо сторони OO_1 .

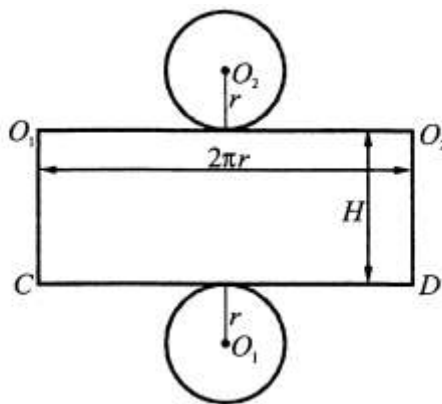
$H = OO_1$ – **висота** циліндра.



Циліндр складається з двох кругів, що лежать у паралельних площинах і бічної поверхні. Круги називають **основами** циліндра, а їх радіуси – **радіусом** циліндра. Основи циліндра паралельні й рівні. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл основ, називають **твірними** циліндра. Твірні утворюють бічну поверхню циліндра. Твірні і вісь циліндра перпендикулярні до площин основ. Відстань між площинами основ є **висотою** циліндра.



Розгорткою циліндра є прямокутник, одна із сторін якого дорівнює висоті циліндра, а інша – довжині кола основи та два рівні круги.

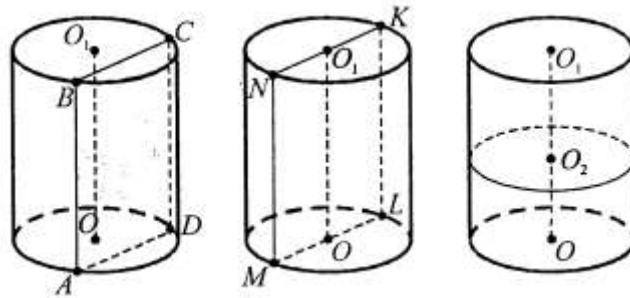


Площа бічної поверхні циліндра: $S_{б.п.} = 2\pi R H$.

Площа повної поверхні циліндра: $S_{п.п.} = S_{б.п.} + 2 S_{осн.} = 2\pi R H + 2\pi R^2$

Об'єм циліндра: $V = S_{осн.} H = \pi R^2 H$.

Перерізи циліндра площиною

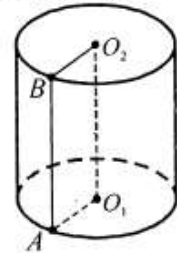


Приклад 1. Знайти площу повної поверхні циліндра радіуса 3 см, висота якого дорівнює 5 см.

■ $S_{\text{п.}} = 2\pi R(R + H)$, де $R = O_1A = 3$ см, $H = AB = 5$ см.

$S_{\text{п.}} = 2\pi \cdot 3(3 + 5) = 48\pi$ (см²).

Відповідь. 48π см². ■



Приклад 2. Знайти площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням квадрата з діагоналлю $5\sqrt{2}$ см навколо сторони.

■ $BC = AD = R$. Оскільки $ABCD$ — квадрат, то $AB = AD = R$.

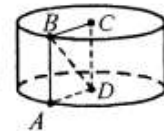
Із прямокутного трикутника ABD ($\angle A = 90^\circ$) маємо: $R^2 + R^2 = (5\sqrt{2})^2$, $2R^2 = 50$,

$R^2 = 25$, $R = 5$ (см).

$S_{\text{б.}} = 2\pi RH$, $H = AB = R = 5$ (см).

Отже, $S_{\text{б.}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 = 50\pi$ (см²).

Відповідь. 50π см². ■



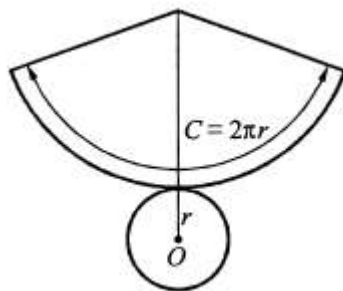
КОНУС

Тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один із його катетів, називають **конусом**. Конус складається із круга основи й бічної поверхні. Круг називають **основою** конуса, його радіус — **радіусом** конуса. Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називають **твірними** конуса. Усі твірні конуса рівні.



Пряму, яка проходить через вершину конуса і центр основи, називають **віссю** конуса. Вісь конуса перпендикулярна до площини основи конуса. Відрізок осі, що сполучає вершину конуса з центром основи, називають **висотою** конуса.

Розгорткою конуса є круговий сектор круга, радіус якого дорівнює твірній конуса l , а довжина дуги — довжині кола основи і круг, радіус якого дорівнює радіусу основи конуса.

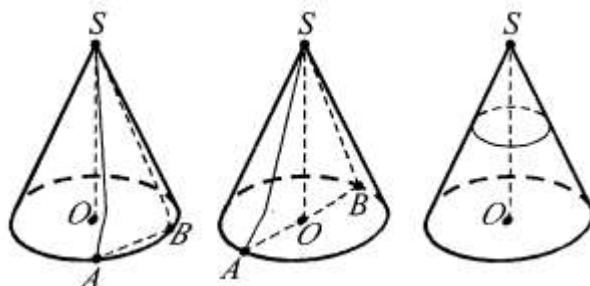


Площа бічної поверхні конуса: $S_{б.п.} = \pi Rl$.

Площа повної поверхні конуса: $S_{п.п.} = S_{б.п.} + S_{осн.} = \pi Rl + \pi R^2$

Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3}S_{осн.} H = \pi R^2 H$.

Перерізи конуса площиною

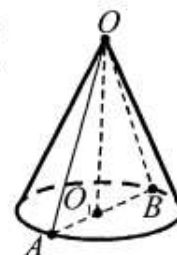


Приклад 1. Обчислити площу бічної поверхні конуса, висота якого дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а радіус основи удвічі менший від твірної.

А	Б	В	Г	Д
$18\pi \text{ см}^2$	$36\pi \text{ см}^2$	$54\pi \text{ см}^2$	$9\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$	$48\pi \text{ см}^2$

■ Нехай OO_1 — конус, висота якого OO_1 дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Радіус основи O_1A удвічі менший від твірної AO . Нехай $AO_1 = x$. Тоді з прямокутного трикутника AO_1O отримаємо: $x^2 + (3\sqrt{3})^2 = (2x)^2$; $4x^2 - x^2 = 27$; $3x^2 = 27$; $x^2 = 9$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ — не задовольняє умову задачі. Отже, $AO_1 = 3$ (см). $AO = 2x = 6$ (см). Маємо: $S_6 = \pi \cdot AO_1 \cdot AO = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$ (см²).

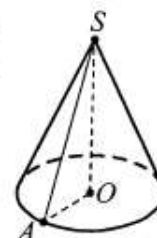
Відповідь. А. ■



Приклад 2. Кут між висотою і твірною конуса дорівнює 45° , а висота конуса — $3\sqrt{2}$ см. Знайти площу бічної поверхні конуса.

■ Трикутник SOA — прямокутний ($\angle O = 90^\circ$). $\angle OSA + \angle SAO = 90^\circ$, $\angle SAO = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Отже, трикутник SOA — рівнобедрений, $OA = SO = 3\sqrt{2}$ (см) і $R = OA = 3\sqrt{2}$ см. $SA = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ (см). $S_6 = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}\pi$ (см²).

Відповідь. $18\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$. ■

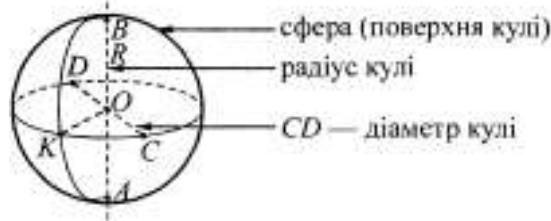


Тест для самоперевірки «Конус та його елементи»

- Конус можна отримати шляхом обертання :
 - прямокутного трикутника навколо гіпотенузы;
 - рівнобедреного трикутника навколо його основи;
 - В) прямокутного трикутника навколо його катета.**
- Розгорткою бічної поверхні конуса є круговий....
 - А) сектор;**
 - Б) сегмент;
 - В) елемент.
- Площа основи конуса з радіусом R можна знайти за формулою:
 - А) πR ;
 - Б) πR^2**
 - В) $2\pi l$.
- Прямокутний трикутник катети якого дорівнюють 5 см і 12 см, обертається навколо більшого катета. Знайдіть довжину твірної отриманого конуса.
 - А) 3 см;
 - Б) 5 см;
 - В) 6 см;
 - Г) 13 см;**
 - Д) 8 см.
- Твірна конуса дорівнює 6 см і утворює з площиною основи конуса кут 60° . Знайдіть радіус основи конуса.
 - А) 5 см;
 - Б) 3см;**
 - В) 4 см;
 - Г) 2,5 см;
 - Д) 12см.
- Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайдіть довжину твірної конуса, якщо його висота дорівнює 3 см.
 - А) 11 см;
 - Б) 7 см;
 - В) 10 см;
 - Г) 5 см; *
 - Д) 4 см.
- Хорду основи конуса, довжина якої a , видно з центра основи під кутом α . Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом β . Визначити висоту конуса.
 - А) $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$;
 - Б) $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;**
 - В) $\frac{a \operatorname{ctg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;
 - Г) $\frac{a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;
 - Д) $\frac{a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$.

КУЛЯ

Кулею називають тіло, утворене внаслідок обертання півкруга навколо прямої, що містить його діаметр.



На рисунку зображено кулю, яка утворена внаслідок обертання півкола навколо його діаметра АВ. АВ – **діаметр** кулі, точка О – центр кулі.

Поверхню кулі називають **сферою**.

Діаметральна площина – це площина, яка проходить через центр кулі.

Переріз кулі діаметральною площиною – **великий круг**, а переріз сфери – **велике коло**.

Площа сфери: $S = 4\pi R^2$

Об'єм кулі: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Приклад 1. Обчислити площу поверхні кулі, якщо її радіус дорівнює 2 см.

■ $S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2$. $S_{\text{сф.}} = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (см²).

Відповідь. 16π см². ■

Приклад 2. Знайти об'єм кулі, якщо її обмежує сфера, площа якої дорівнює 100π см².

■ $S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2$. $4\pi R^2 = 100\pi$, $R^2 = 25$, $R = 5$ (см). $V_{\text{к.}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3} \pi$ (см³).

Відповідь. $\frac{500}{3} \pi$ см³. ■

Приклад 3. У скільки разів потрібно збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів?

■ Нехай радіус даної кулі дорівнює R_1 , а радіус кулі після збільшення — R_2 . Тоді: $V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3$,

$V_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3$. Маємо: $V_2 = 8V_1$, $\frac{4}{3} \pi R_2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3$, $R_2^3 = 8R_1^3$, $R_2^3 = (2R_1)^3$. Отже, $R_2 = 2R_1$, тобто радіус кулі

потрібно збільшити удвічі.

Відповідь. Збільшити удвічі. ■

ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ «КУЛЯ»

- Серед наведених тверджень виберіть неправильне твердження.
 - Куля – тіло, утворене обертанням півкруга навколо діаметра
 - Сфера – поверхня кулі
 - Перетин сфери площиною - круг
 - Центр сфери є центром її симетр
 - Найбільшою хордою сфери є її діаметр
- Площа великого круга сфери 225π см². Чому дорівнює радіус сфери?
 - 25
 - 30
 - 10
 - 15
- Радіус кулі $\sqrt{15}$ см. Де розміщена точка А, якщо вона віддалена від центра кулі на відстані 4 см?
 - Поза кулею
 - На сфері
 - Всередині кулі
 - Визначити неможливо

4. Яке з наведених чисел не може бути кількістю спільних точок прямої і сфери?
 а) 2 б) 3
 в) 1 г) 0
5. Точки А (3;-1;5) і В (5;-3;1) є кінцями одного з діаметрів сфери. Обчисліть координати точки О, яка є центром цієї сфери.
 а) О (-4;-2;3) б) О (8;-4;6)
 в) О (-2;1;-3) г) О (4;-2;3)
6. Точки М (-4;2;1) і N (-3;0;-1) є кінцями одного з діаметрів сфери. Чому дорівнює радіус цієї сфери?
 а) 3 см б) $\sqrt{3}$ см
 в) 1,5 см г) 4 см
7. Обчисліть радіус кулі, якщо площа її діаметрального перерізу дорівнює 36π см²
 а) 9 см б) 4 см
 в) 6 см г) 18 см
8. Знайдіть об'єм кулі, радіус якої дорівнює 6 дм.
 а) 864π дм³ б) 288π дм³
 в) 96π дм³ г) 48π дм³
9. Радіус сфери дорівнює 8 см. Знайдіть площу поверхні сфери.
 а) 192π см² б) 256 см²
 в) 256π см² г) 192 см²
10. Кулю переплавили в три кулі, радіуси яких дорівнюють 3 см, 4 см, 5 см. Знайдіть діаметр заданої кулі.
 а) 6 см б) 9 см
 в) 12 см г) 18 см

КОРИСНІ ПОСИЛАННЯ:

1. [11 клас. Геометрія. Циліндр і конус](#)
2. [11 клас. Геометрія. Тіла обертання](#)
3. [ІНТЕРАКТИВНА ВПРАВА](#)



4.